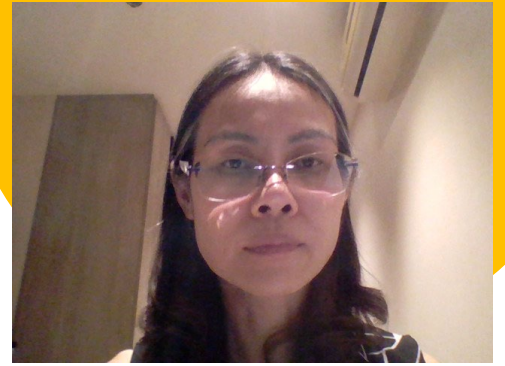
# FRA131 Basic Mechanics
# Rigid Body Kinematics
# Relative-Motion Analysis using Rotating Axes

Boontariga KASEMSONTITUM, Ph.D.
(ดร.บุญฑริกา เกษมสันติธรรม)
Institute of Field roBOtics (FIBO)
King Mongkut's University of Technology Thonburi

# Objectives

- Review general relative motion, problem solving procedures
- To investigate relative motion in rotating frame of reference.
- To demonstrate the problem – solving strategy for relative – motion analysis using rotating axes.

# ระบบแกน (Coordinate system/Frame)



1. จุดกำเนิด (Origin)

2. กำหนดแกนใดๆ 2 แกน ทั้งแนวและทิศ (ที่ทำให้เราแก้โจทย์ได้ง่าย โดยดูจากแนวโน้มการเคลื่อนที่ของวัตถุ ซึ่งแนวการเคลื่อนที่ของวัตถุ ก็จะสอดคล้องกับกฎนิวตันข้อที่ 2 นั่นคือสอดคล้องกับทิศของแรงลัพธ์)

3. เขียนแกนที่ 3 (ถ้าจำเป็น) แกนนี้จะไม่ได้ถูกกำหนดตามใจเรา แต่จะเป็นไปตามกฎ cross product ทางคณิตศาสตร์

**หมายเหตุ**

ระบบแกนแบ่งได้เป็น 2 ประเภทหลักๆ

- ระบบแกนที่ไม่เคลื่อนที่ (Global Frame/coordinates) ระบุทุกครั้ง

- ระบบแกนที่เคลื่อนที่ (ติดอยู่กับวัตถุที่เคลื่อนที่ Joint space) ใช้เมื่อสนใจความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ระหว่างวัตถุ 2 ชิ้นขึ้นไป (เคลื่อนที่สัมพัทธ์) และวัตถุทั้งสองนั้นมีการเคลื่อนที่

# แนวทางการทำโจทย์ Kinematics (Dynamics)

1. กำหนด Global Frame/Coordinates

(2). Option ถ้าเป็นโจทย์ที่ต้องใช้เรื่องการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ ก็ต้องกำหนดระบบแกนอ้างอิง (reference frame) อีกเฟรม โดยระบุวัตถุที่เราจะวางหลัก/จุดยึดก่อน โดยการเลือกวัตถุก็จะเลือกวัตถุที่เรารู้ข้อมูล kinematics (*r*, *v*, *a*) อยู่แล้ว วัตถุนั้นก็จะเป็นที่สิงสถิตของ แกน/เฟรมอ้างอิงของจุด A นั่นเอง

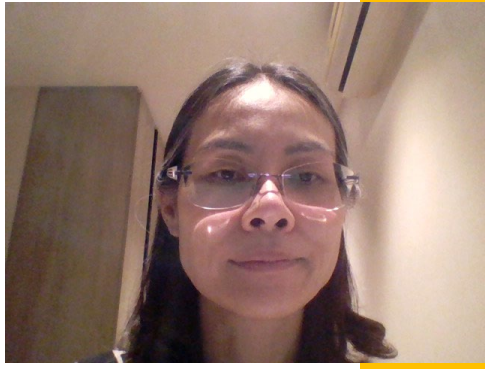
รู้ว่าเฟรมจะติดไปกับวัตถุไหนแล้ว แล้วไงต่อ?

(3.) ปักจุดกำเนิดเฟรม และวางแนวแกน 2 แกน (ทำไมแค่ 2 แกน? โลกเรามันเป็น 3 มิติ ไม่ใช่หรือ?) ข้อแนะนำ

- วางจุดกำเนิดเฟรมอ้างอิงที่ 2 นี้บนจุดเดียวกับจุดกำเนิดเฟรมโลกในข้อ 1.
- วางให้แกนอยู่ในแนวเดียวกันกับแนวแกนของเฟรมโลก หรือถ้าแนวเดียวกันเลยไม่ได้ก็ให้ขนานกัน

(4.) พิจารณารูปแบบการเคลื่อนที่ของวัตถุอ้างอิง/วัตถุปักหมุดแกนอ้างอิง (เมื่อเวลาเปลี่ยนไป จุดกำเนิดเฟรมเปลี่ยนตำแหน่งไหม, แกนหมุนเปลี่ยนทิศทางไหม?)

# แนวทางการทำโจทย์พลศาสตร์ (Dynamics)



5. ถึงคราว คณิตศาสตร์เป็นพระเอก ใส่สมการความสัมพันธ์ (Kinematic Equations)

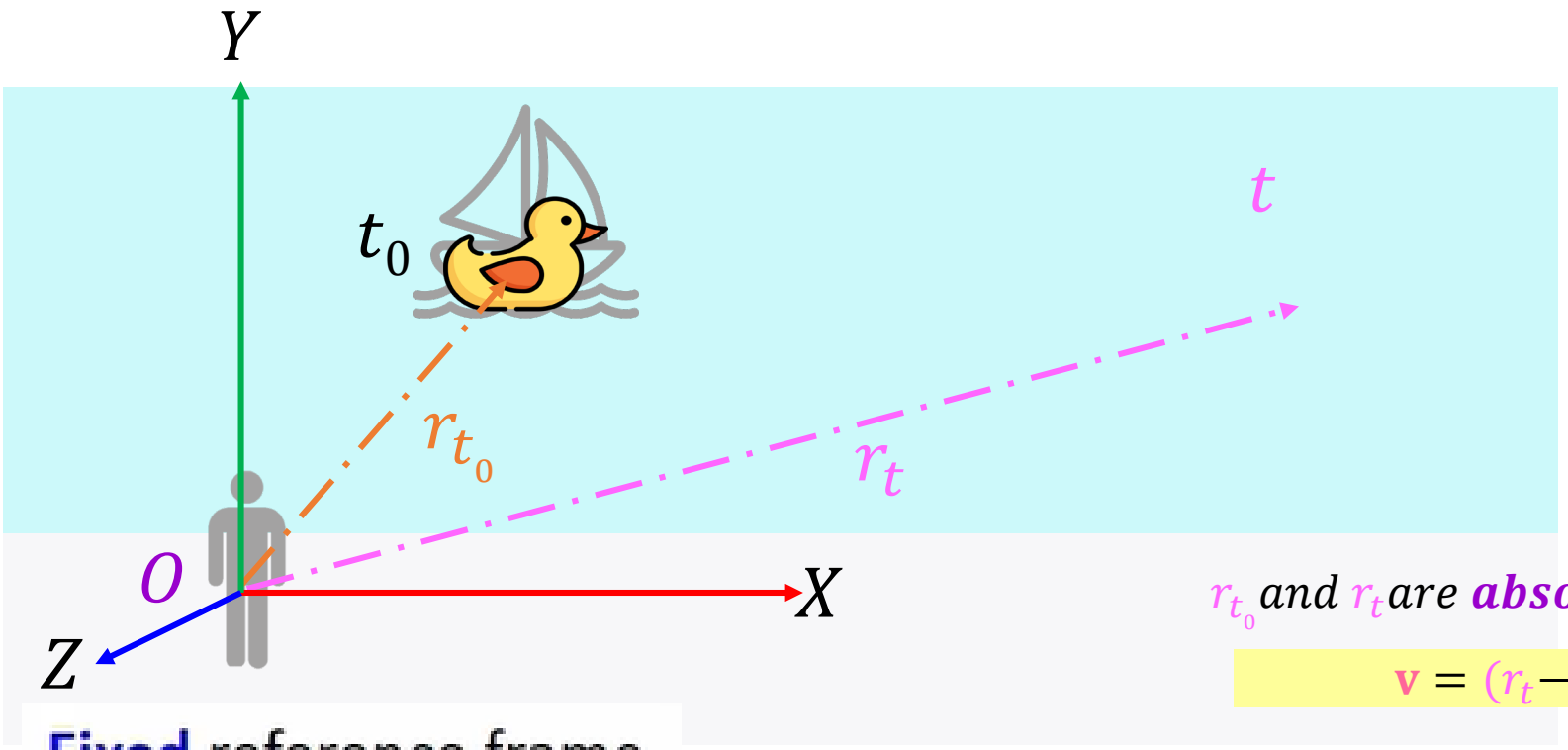
**Relative position:**

$$\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

# *Recall*: Relative Motion with translating frame



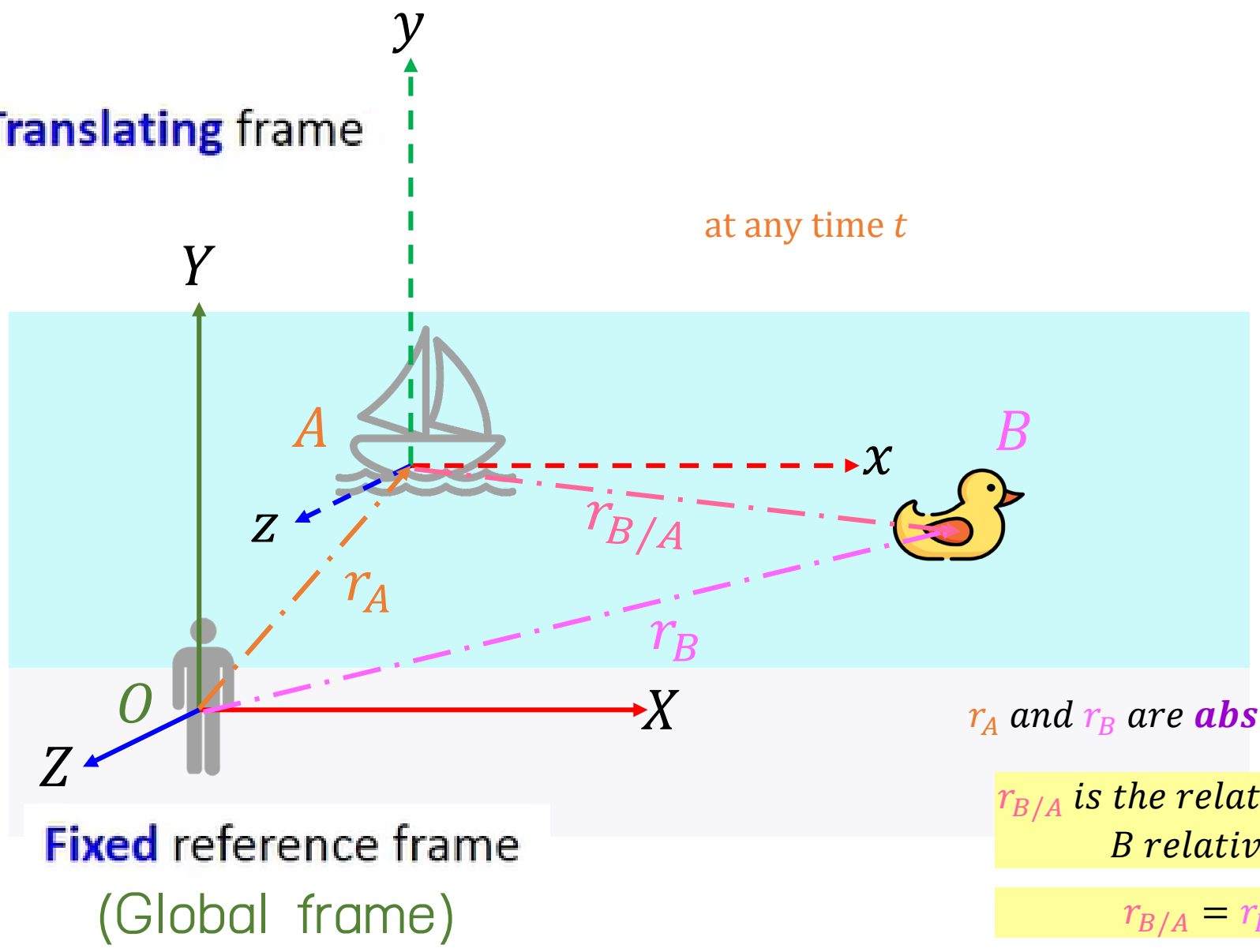

**Fixed** reference frame

(Global frame)

$r_{t_0}$ *and* $r_t$ *are* ***absolute*** *positions.*

$$\mathbf{v} = (r_t - r_{t_0})/t$$

# *Recall*: Relative Motion with translating frame




$r_A$ *and* $r_B$ *are* ***absolute*** *positions.*

$r_{B/A}$ *is the relative position, B relative to A.*

$$r_{B/A} = r_B - r_A$$

**Relative position:**

$$\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

**Relative velocity:**

$$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$$

**Relative acceleration:**

$$\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A$$

**Remember:** for translating frames, the unit vectors **i**, **j** and **k** do not change with time!

$$\mathbf{r}_{B/A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

No need to apply chain rule!

**Relative position:**

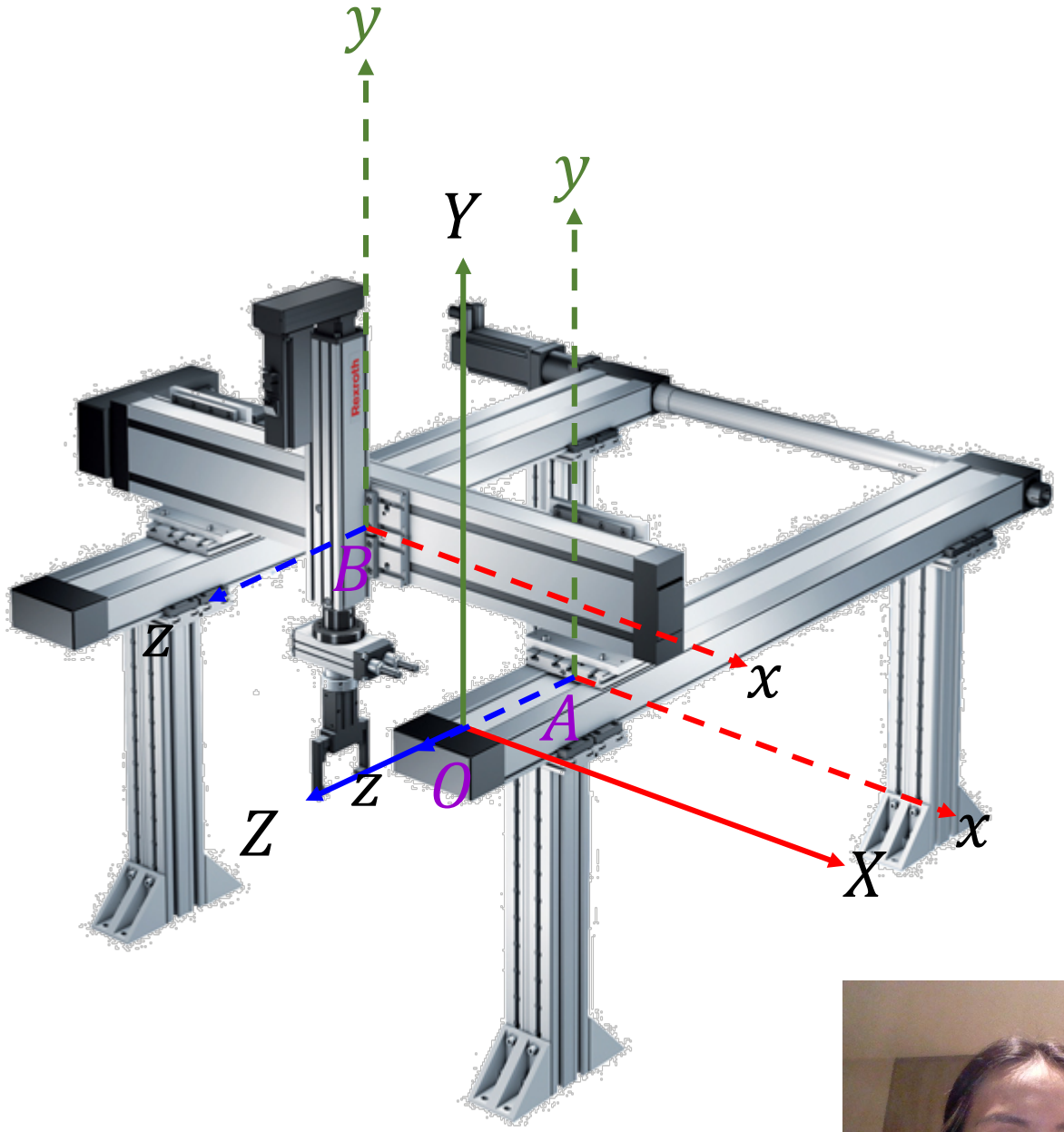
$$\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

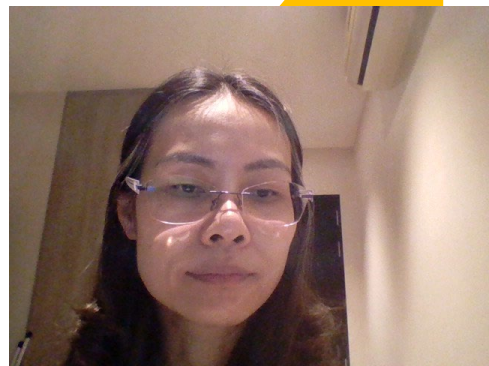
**Relative velocity:**

$$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$$

**Relative acceleration:**

$$\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A$$



**Relative position:**

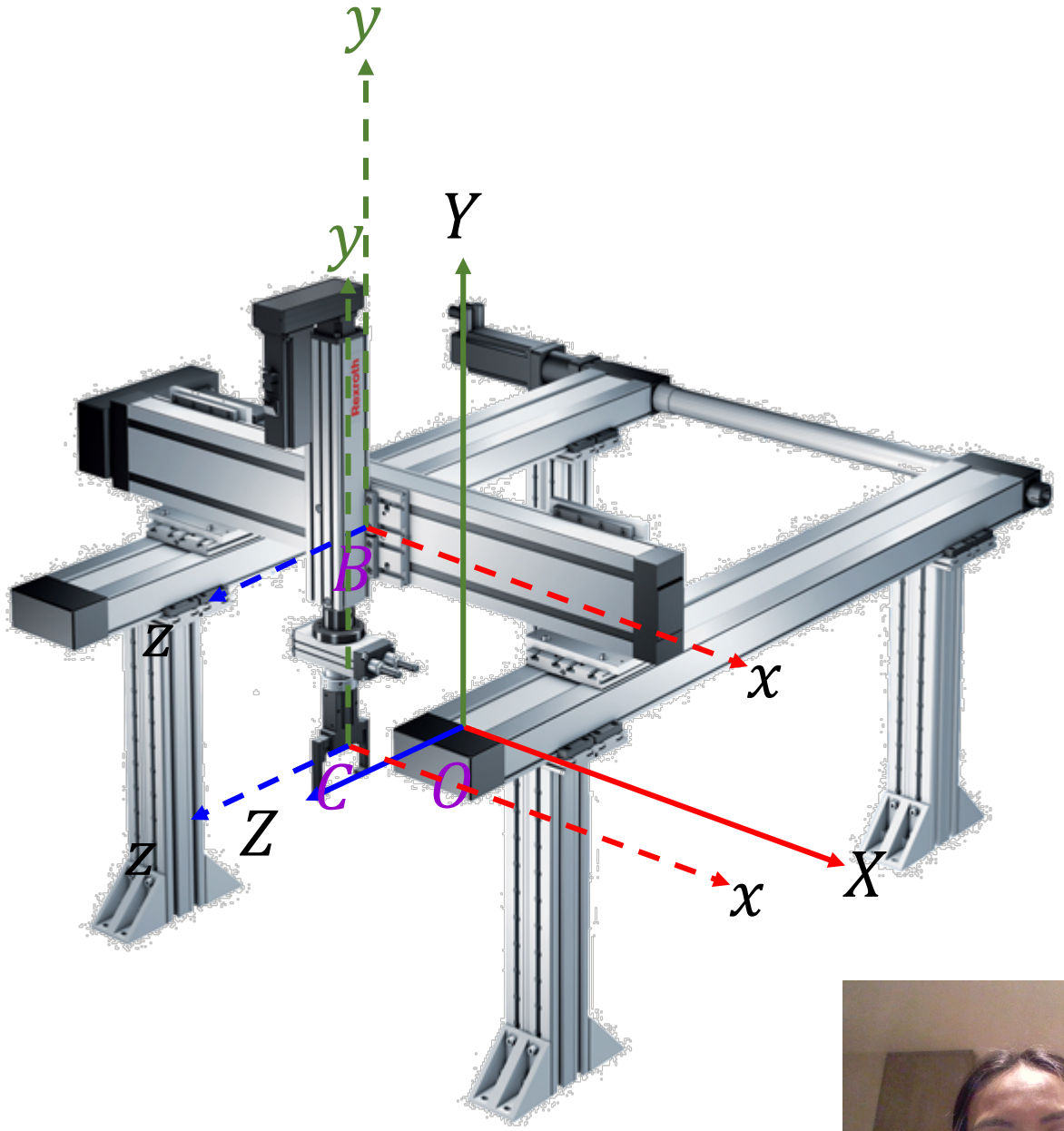
$$\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

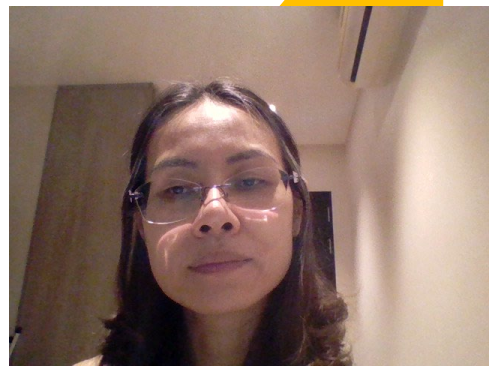
**Relative velocity:**

$$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$$

**Relative acceleration:**

$$\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A$$



**Relative position:**

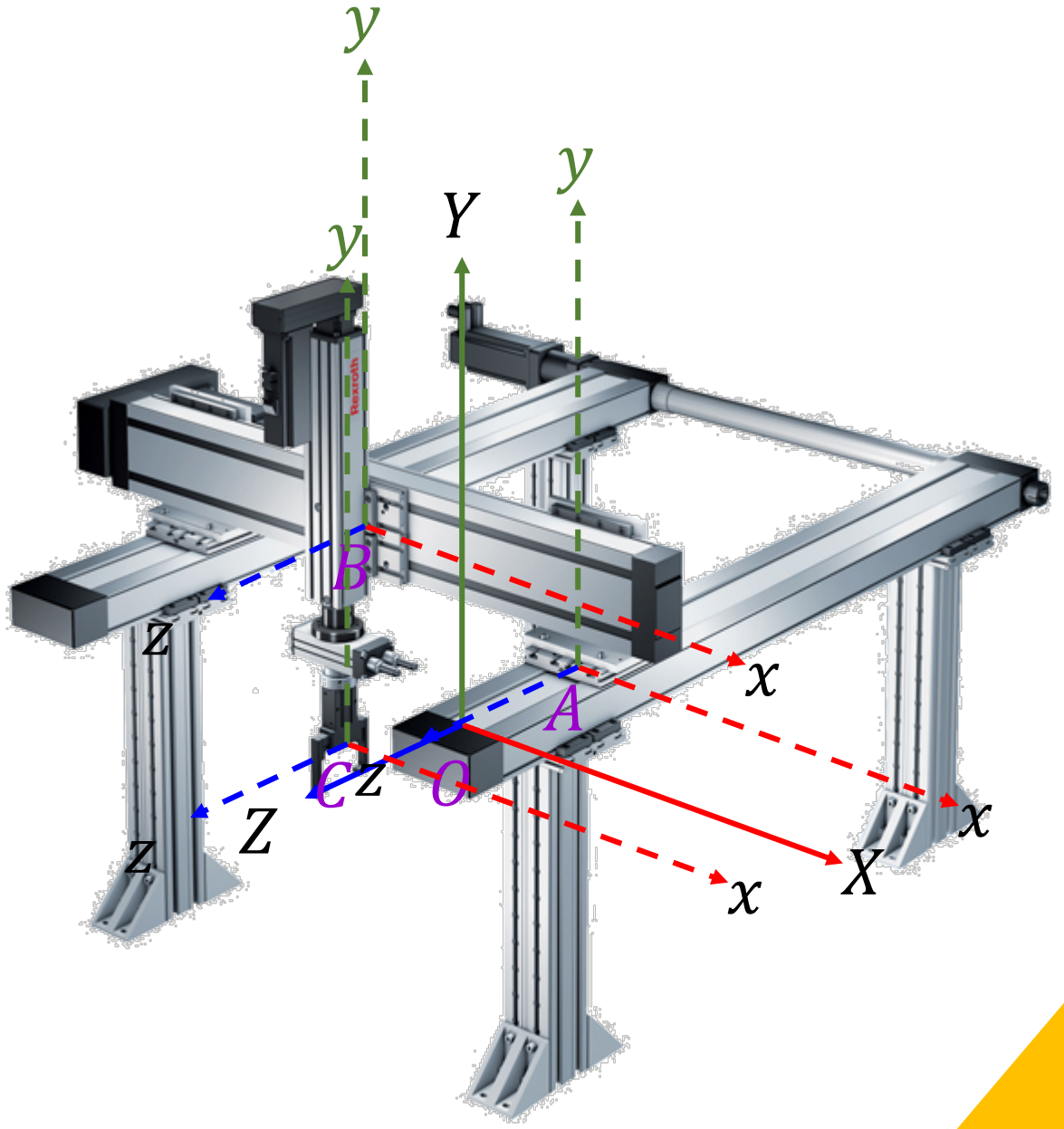
$$\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

**Relative velocity:**

$$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$$

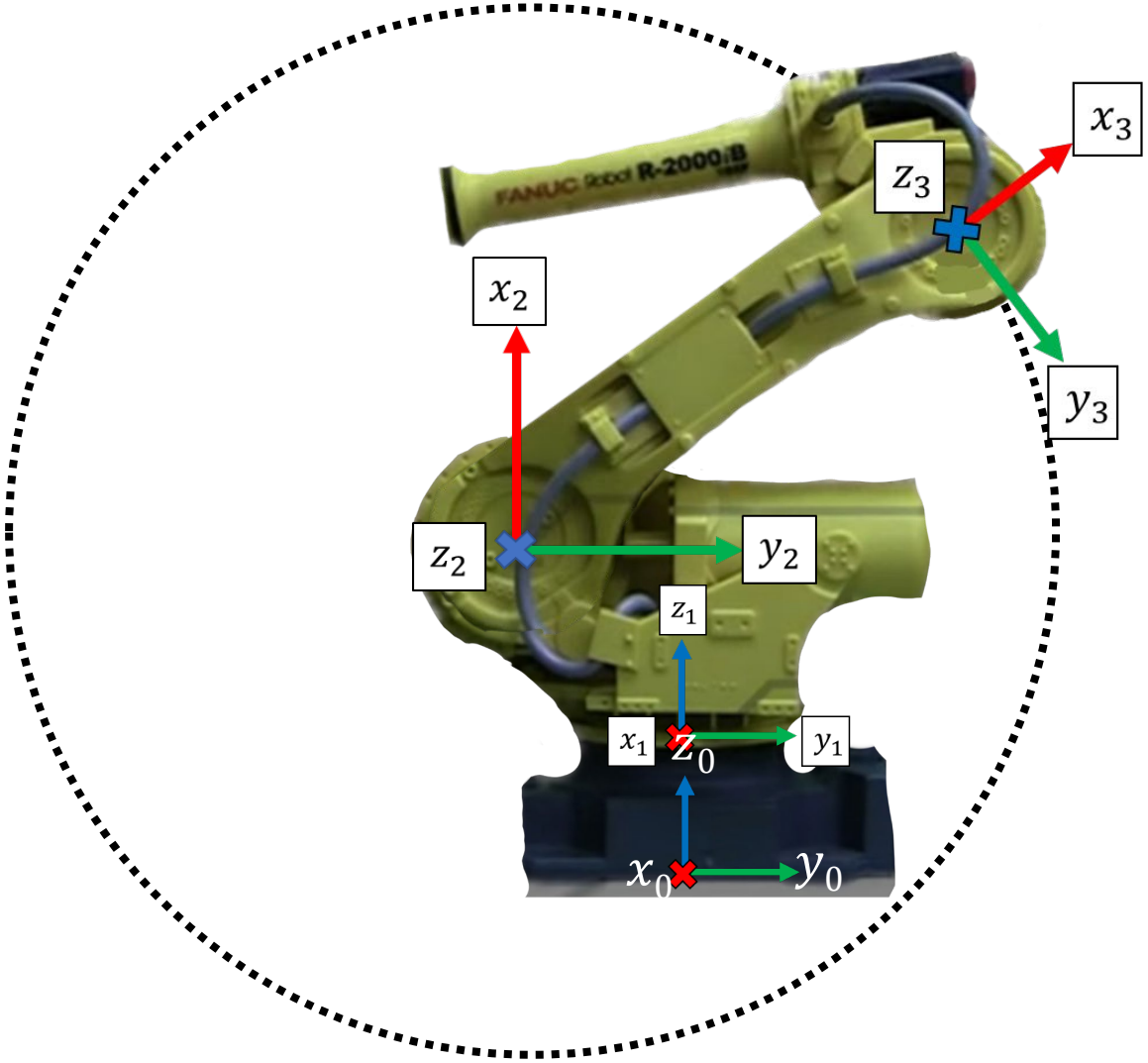
**Relative acceleration:**

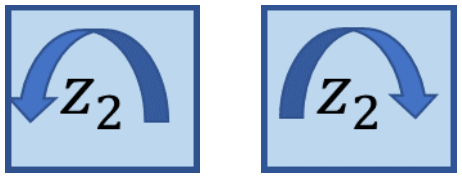
$$\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A$$



# Relative – Motion Analysis using Rotating Axes

Example 1: Articulate Robot



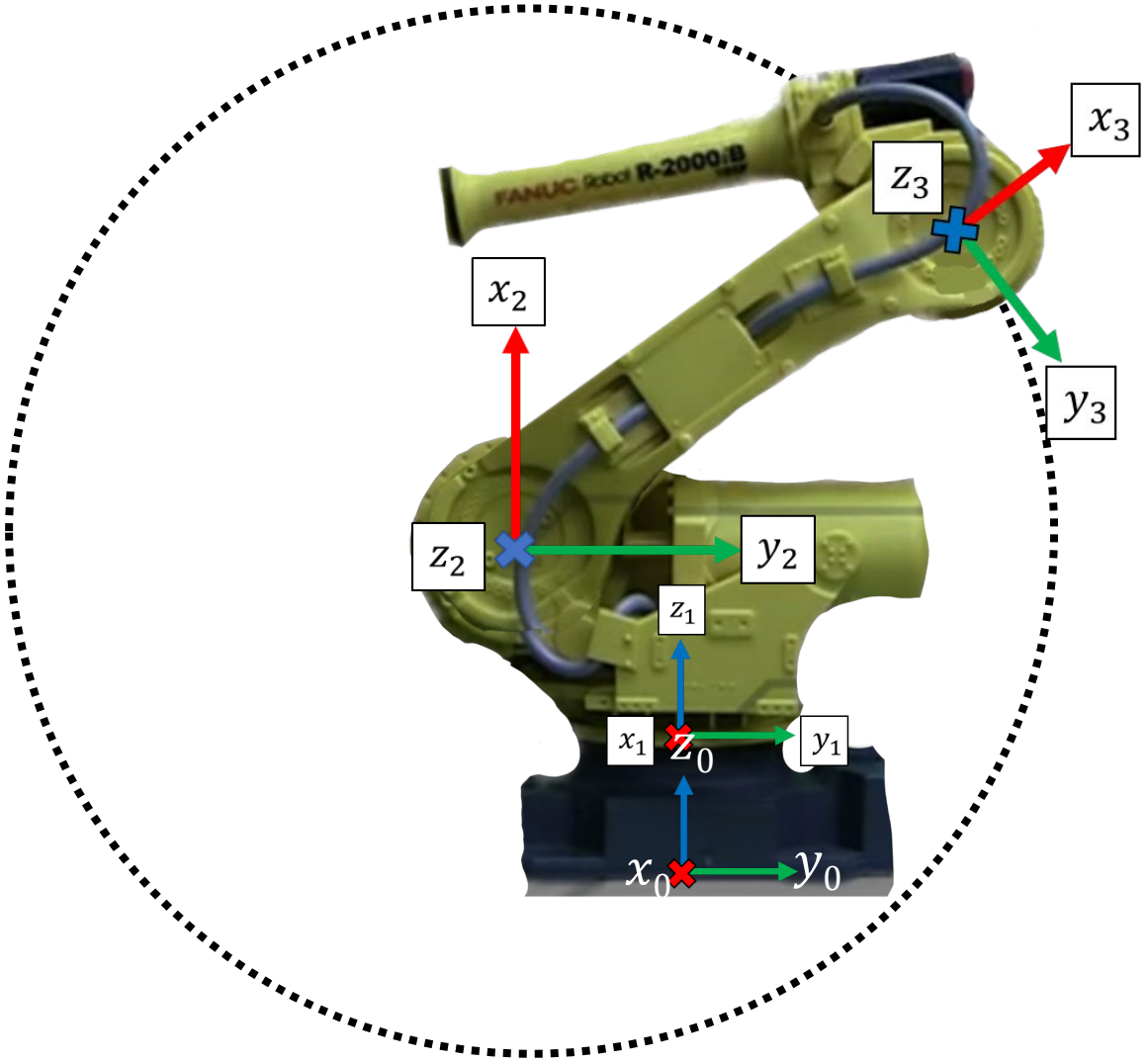


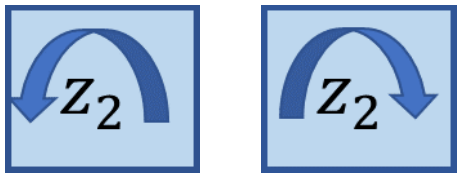


https://www.youtube.com/watch?v=7coUcEHxnYA

# Relative – Motion Analysis using Rotating Axes

Example 1: Articulate Robot







https://www.youtube.com/watch?v=7coUcEHxnYA

# แนวทางการทำโจทย์พลศาสตร์ (Dynamics)

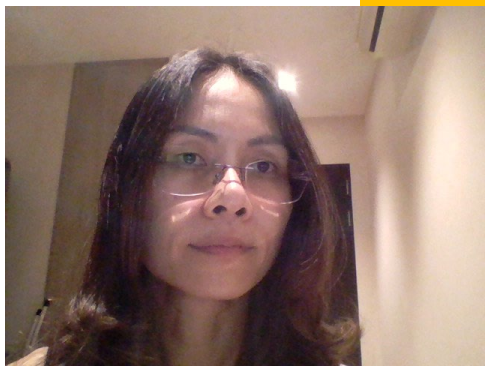
5. ถึงคราว คณิตศาสตร์เป็นพระเอก ใส่สมการความสัมพันธ์ (Kinematic Equations)

**Relative position:**

$$\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

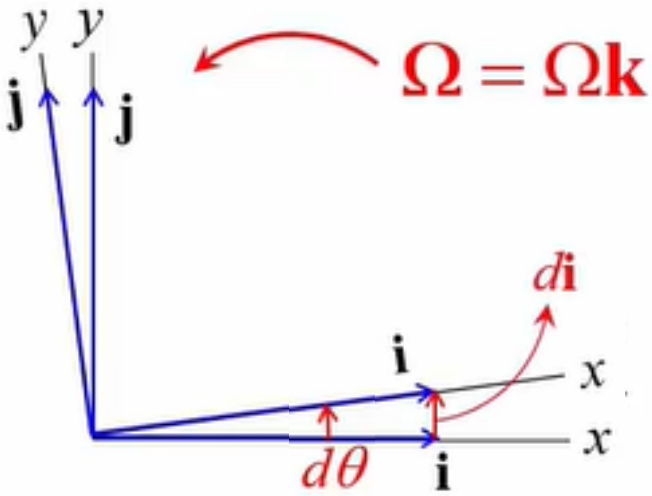
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$



$$\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$ absolute velocity

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$$




$$d\mathbf{i} = (1 \cdot d\theta)\,\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{j} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\mathbf{i}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{B/A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$ in the *xy* frame

**i** and **j** are now variables!

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

velocity of point *B* as observed at point *A* in the *xy* frame, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xy}$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xy}$$

ใช้ได้กับทุกกรณี

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xy}$$

$\mathbf{v}_B$ = velocity of $B$, measured from the $X, Y, Z$ reference

$\mathbf{v}_A$ = velocity of the origin $A$ of the $x, y, z$ reference, measured from the $X, Y, Z$ reference

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = velocity of "$B$ with respect to $A$," as measured by an observer attached to the rotating $x, y, z$ reference

$\boldsymbol{\Omega}$ = angular velocity of the $x, y, z$ reference, measured from the $X, Y, Z$ reference

$\mathbf{r}_{B/A}$ = position of $B$ with respect to $A$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \left(\mathbf{v}_{B/A}\right)_{xy}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d\left(\mathbf{v}_{B/A}\right)_{xy}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \left(\mathbf{v}_{B/A}\right)_{xy} \qquad \frac{d\left(\mathbf{v}_{B/A}\right)_{xy}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \left(\mathbf{v}_{B/A}\right)_{xy} + \left(\mathbf{a}_{B/A}\right)_{xy}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}\right) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \left(\mathbf{v}_{B/A}\right)_{xy} + \left(\mathbf{a}_{B/A}\right)_{xy}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} - \Omega^2 \mathbf{r}_{B/A} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \left(\mathbf{v}_{B/A}\right)_{xy} + \left(\mathbf{a}_{B/A}\right)_{xy}$$

acceleration of
observed at po
$xy$ frame

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

where

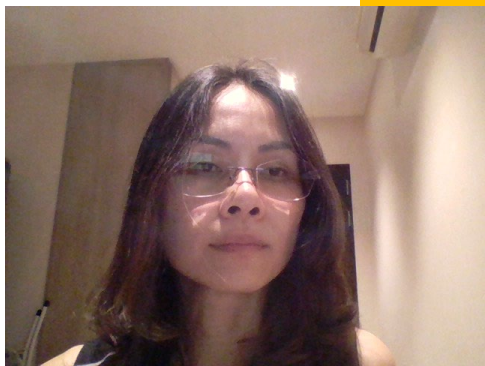
$\mathbf{a}_B$ = acceleration of $B$, measured from the $X$, $Y$, $Z$ reference

$\mathbf{a}_A$ = acceleration of the origin $A$ of the $x$, $y$, $z$ reference, measured from the $X$, $Y$, $Z$ reference

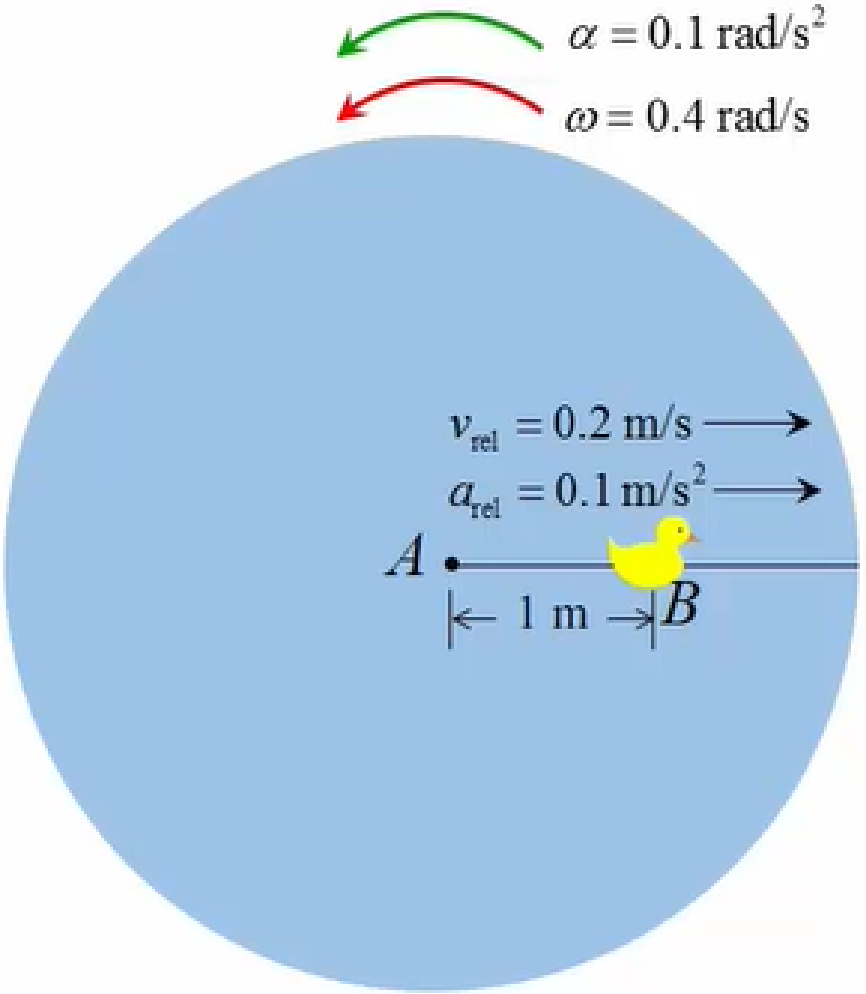
$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = acceleration and velocity of $B$ with respect to $A$, as measured by an observer attached to the rotating $x$, $y$, $z$ reference

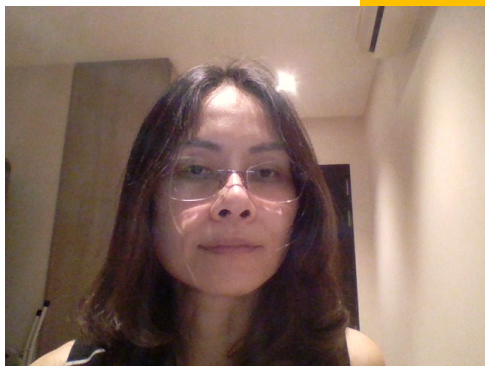
$\dot{\mathbf{\Omega}}$, $\mathbf{\Omega}$ = angular acceleration and angular velocity of the $x$, $y$, $z$ reference, measured from the $X$, $Y$, $Z$ reference

$\mathbf{r}_{B/A}$ = position of $B$ with respect to $A$



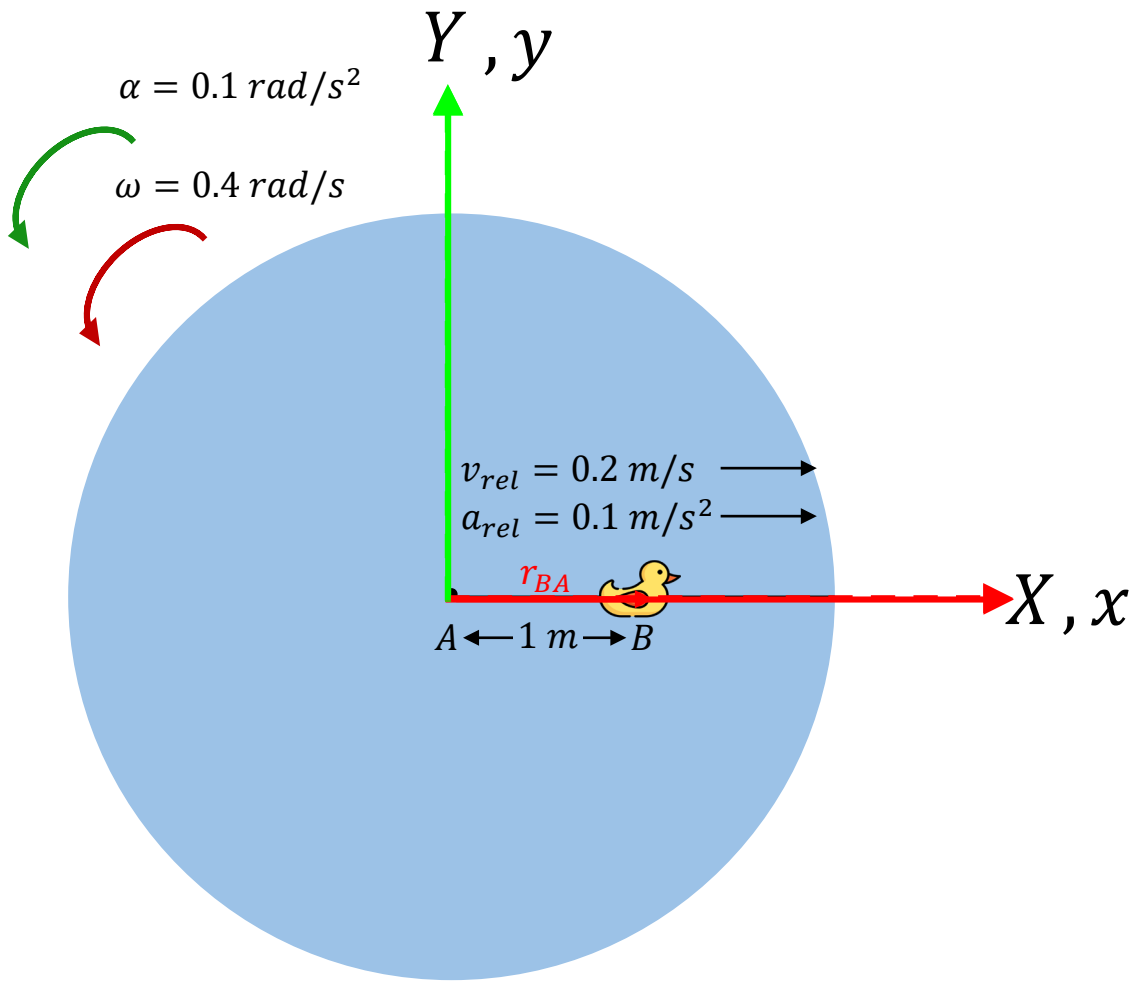
Example 1: The horizontal surface rotates with the angular velocity and acceleration as shown. If a toy duck moves along the straight path on the surface with relative velocity and acceleration as shown, determine its absolute velocity and acceleration.



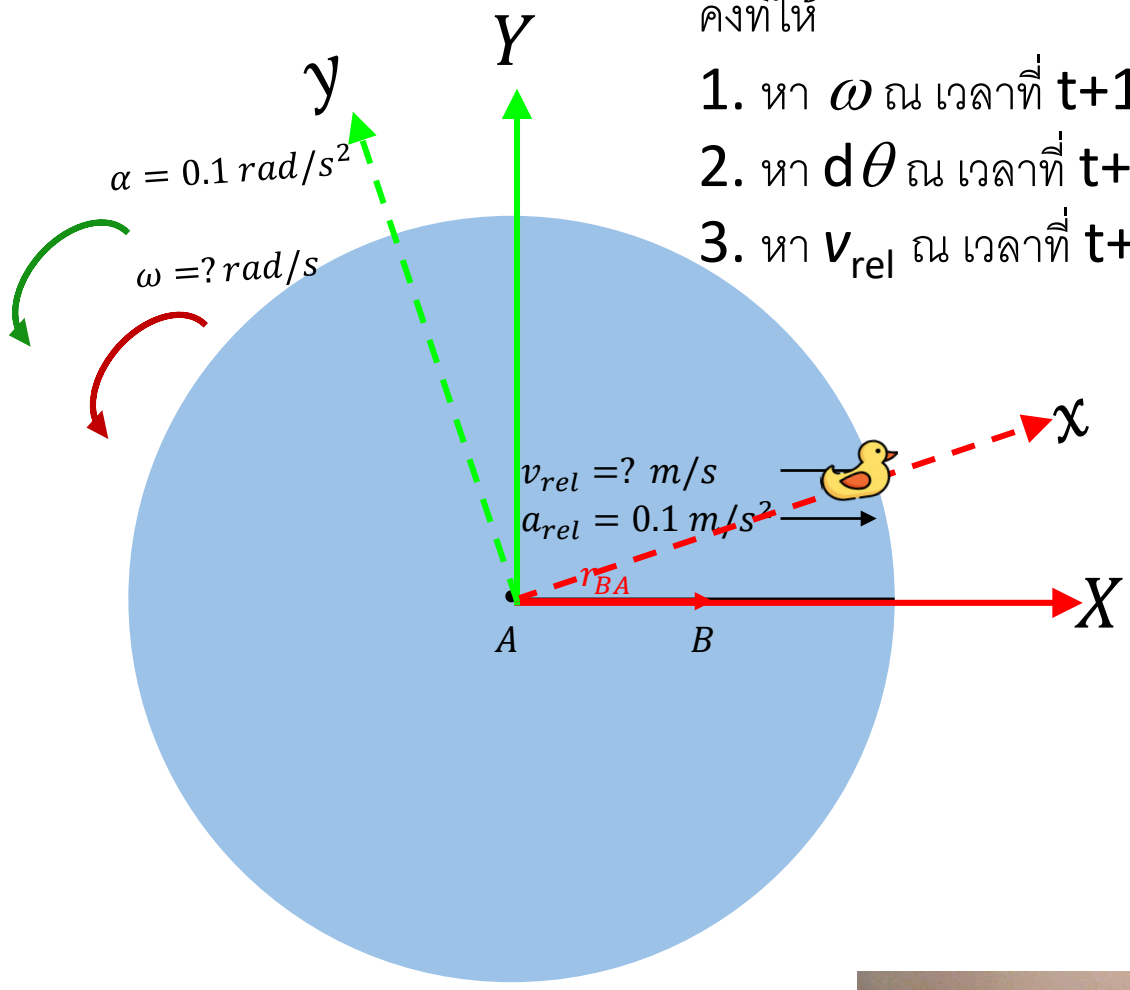



การบ้าน ภายใต้สมมุติฐานว่าความเร่งคงที่ให้

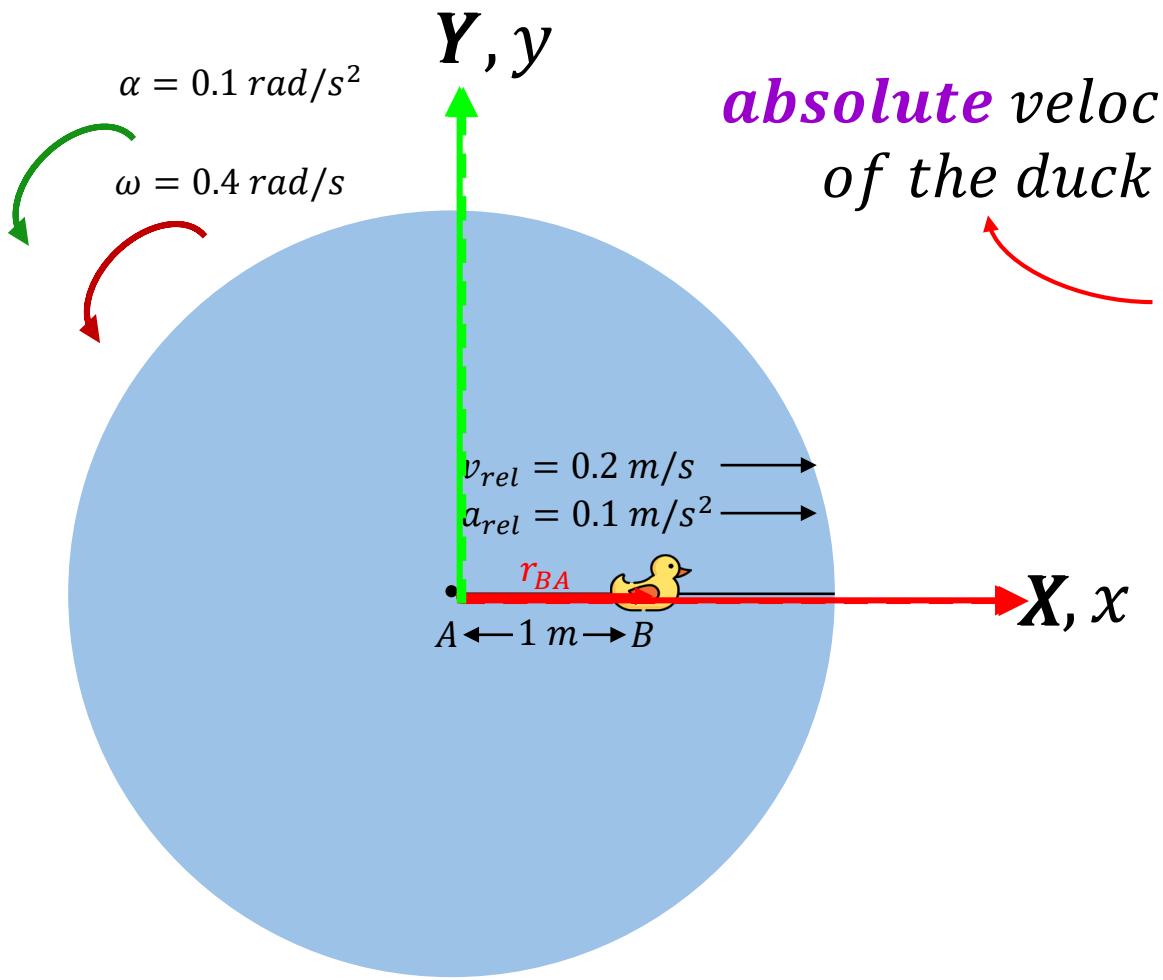
1. หา $\omega$ ณ เวลาที่ t+1 วินาที
2. หา d$\theta$ ณ เวลาที่ t+1 วินาที
3. หา $v_{rel}$ ณ เวลาที่ t+1 วินาที




$t$ (ณ เวลาที่โจทย์ต้องการให้หา $v_B$, $a_B$)




$t$ +1 s



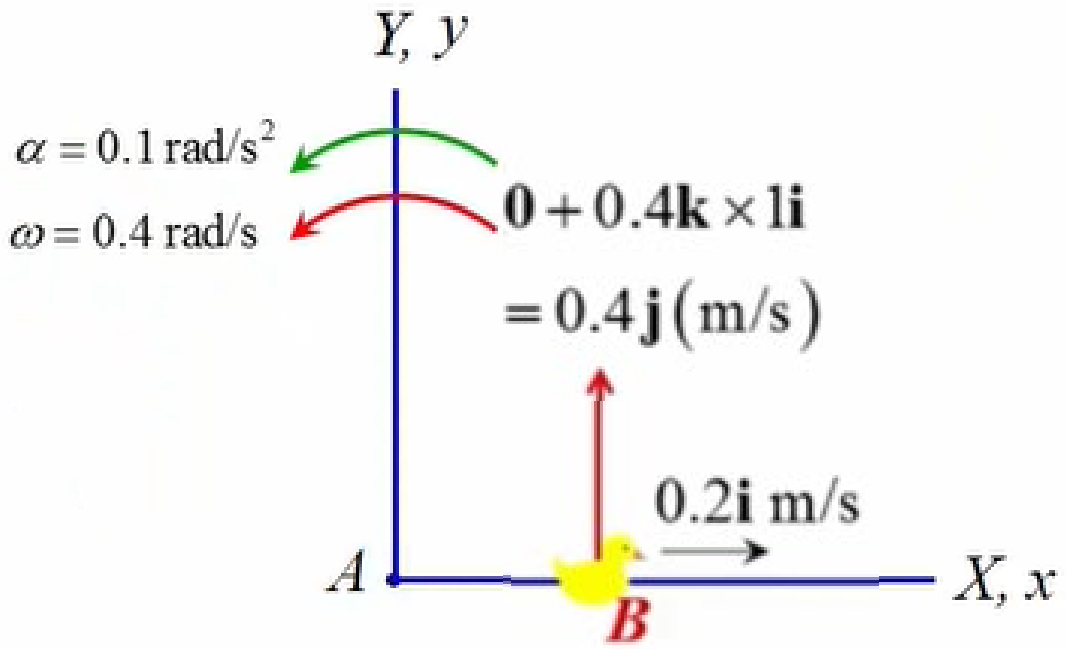

***absolute*** *velocity of the duck*

$$v_B = v_A + \Omega \times r_{B/A} + (v_{B/A})_{xy}$$

$$\mathbf{0} \quad 0.4\boldsymbol{k} \quad 1\boldsymbol{i} \quad 0.2\boldsymbol{i}$$

การบ้าน

4. หาคำตอบของ $\boldsymbol{v}_B$

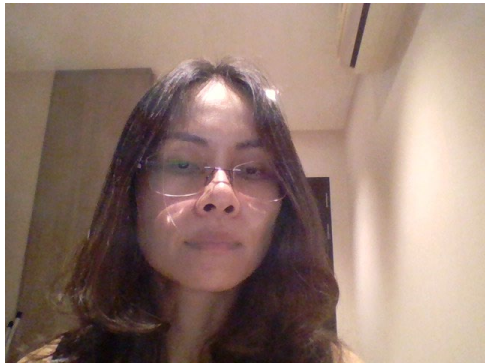


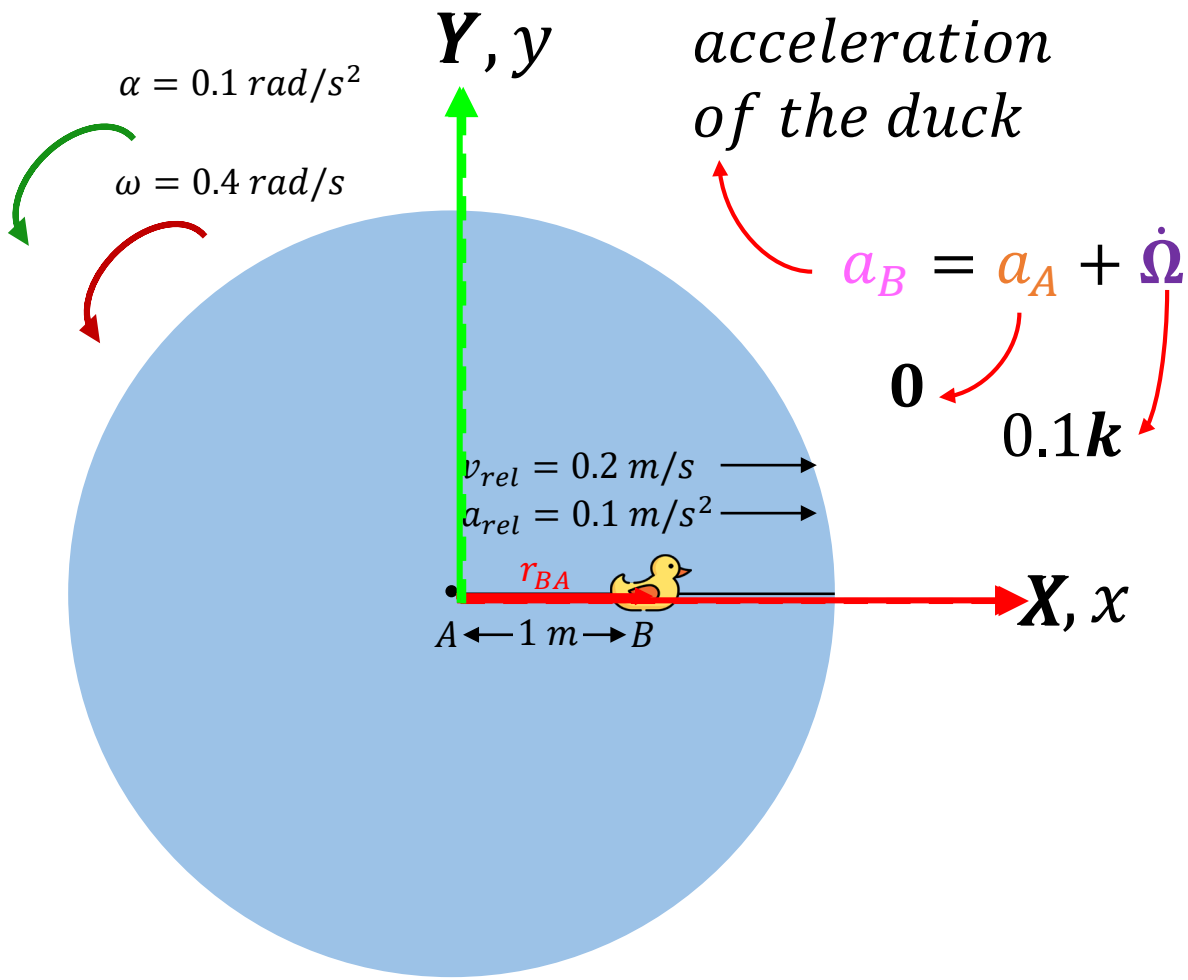

Absolute velocity of the duck

Absolute velocity of **point B** on the *xy* frame.

Relative velocity of the duck wrt point B.

$$\left(\mathbf{v}_B\right) = \left(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}\right) + \left(\left(\mathbf{v}_{B/A}\right)_{xy}\right)$$





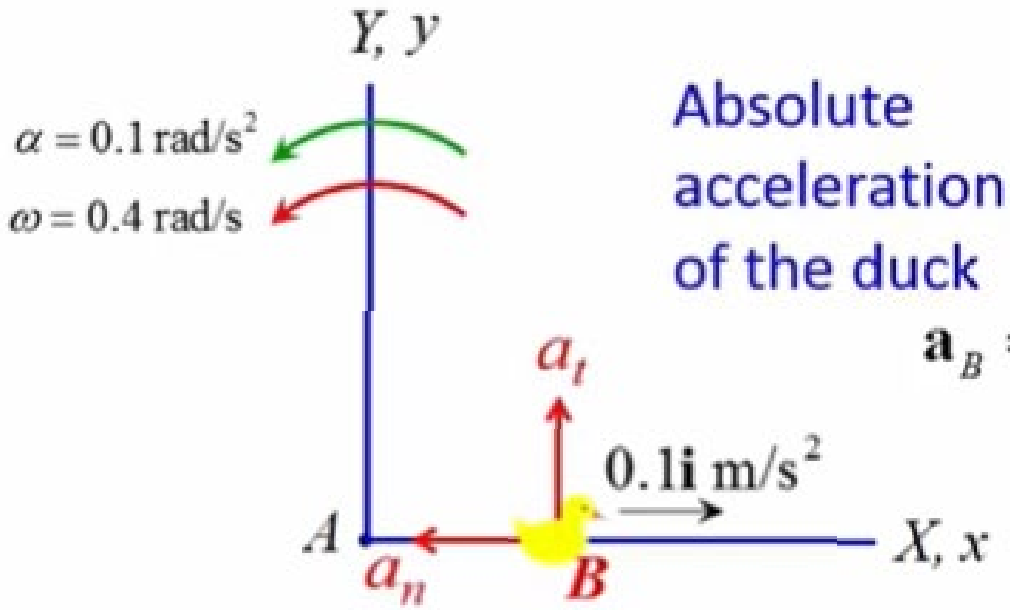

***absolute*** *acceleration of the duck*

$$a_B = a_A + \dot{\Omega} \times r_{B/A} - \Omega^2 r_{B/A} + 2\Omega \times (v_{B/A})_{xy} + (a_{B/A})_{xy}$$

$\mathbf{0}$ $\quad 0.1\boldsymbol{k}$ $\quad 1\boldsymbol{i}$ $\quad 0.4$ $\quad 0.4\boldsymbol{k}$ $\quad 0.2\boldsymbol{i}$ $\quad 0.1\boldsymbol{i}$

การบ้าน

5. หาคำตอบของ $\boldsymbol{a}_B$




Absolute acceleration of the duck

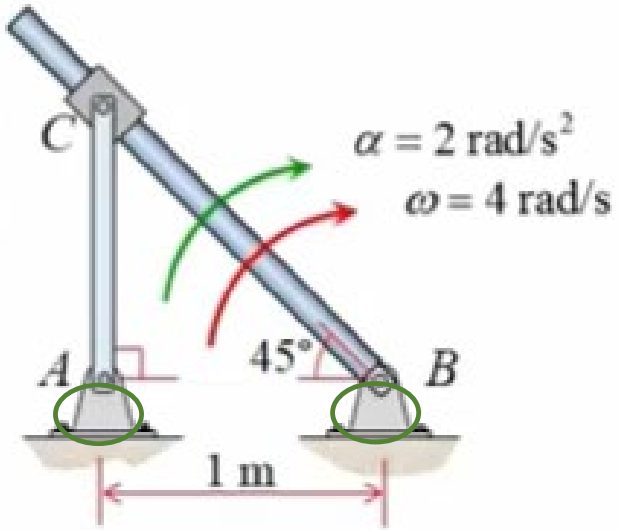
Absolute acceleration of **point B** on the *xy* frame.

Coriolis acceleration

Relative acceleration of the duck wrt point B.

$$\mathbf{a}_B = \underbrace{\mathbf{a}_A}_{0} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A}}_{a_t} - \underbrace{\Omega^2 \mathbf{r}_{B/A}}_{a_n} + \left(2\boldsymbol{\Omega} \times \left(\mathbf{v}_{B/A}\right)_{xy}\right) + \left(\left(\mathbf{a}_{B/A}\right)_{xy}\right)$$

Question 1: At the instant shown, rod $BC$ has angular velocity and angular acceleration as shown. Link $AC$ is pin-connected to collar $C$ which slides freely on rod $BC$. Determine the angular velocity and angular acceleration of link $AC$ at this instant. Hint: the directions of the absolute velocity and the relative velocity (*wrt* rod $BC$) of collar $C$ are both known.



การบ้านที่มอบหมายให้วันนี้จะให้ส่งหลังวันที่ 17 พ.ค.นะคะ แต่จะเป็นวันไหนอยากให้เข้ามาเสนอ และโหวตใน session Live Q&A วันพุธที่ 12 นี้ โดยอ.จะขอเลื่อนเร็วขึ้น เวลา 16:00-18:00

**นโยบายการตรวจ และให้คะแนนการบ้าน**

- กลุ่มที่ส่งก่อนวันที่ 14 พ.ค. จะให้ feedback และให้โอกาสในการแก้ไข และส่งใหม่ภายในกำหนดส่งปกติ
- กลุ่มที่ส่งใกล้ๆ กำหนดส่ง อ.หรือ พี่ TA อาจจะไม่มีโอกาสให้ feedback เพื่อให้ทำส่งครั้งที่ 2 คะ
- คนที่ส่งตามเวลาจะได้คะแนนตามจริง
- คนที่ส่งล่าช้า คะแนนจะหาย 1 % ของคะแนนที่ได้ ทุกๆ 1 ชม. โดย 6 ชม.แรกที่สายไม่นับ